

Stochastik-Übung 4 (Abgabe: 10.11.09)

1	2	3	4	Σ
3	4	4	4	15/16

1) $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist ZV $\Leftrightarrow \{X \leq a\} := \{\omega \mid X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{E} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$

Dabei ist $\mathcal{E}$ σ -Algebra auf Ω .

" $\Rightarrow$ ": Die erste Menge kann auch anders geschrieben werden, nämlich

$$\begin{aligned} \{X \leq a\} &= \{\omega \mid X(\omega) \in]-\infty, a]\} \\ &= X^{-1}(]-\infty, a]) \end{aligned}$$

Da X eine ZV ist, gilt nach Def., dass

$$\forall B \in \text{Bor}(\mathbb{R}) : X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

Insbesondere gilt für die Intervalle, dass

$$]-\infty, a] \in \text{Bor}(\mathbb{R})$$

Also auch $X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{E} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$ ✓

" $\Leftarrow$ ": Es ist zu zeigen, dass $S := \{B \mid B \in \text{Bor}(\mathbb{R}) \wedge X^{-1}(B) \in \mathcal{E}\}$ mit $\text{Bor}(\mathbb{R})$ übereinstimmt.

Nach Voraussetzung gilt, dass

$$\forall a \in \mathbb{R} :]-\infty, a] \in S$$

Analog zu S. 14'2 lässt sich dann zeigen, dass S alle offenen

Teilungen von $\mathbb{R}$ enthält, sofern es außerdem eine σ -Algebra

ist. (1. Schritt: $]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, a - \frac{1}{n}]$ ✓

2. Schritt: $]a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a]$ ✓

Rest genau wie S. 14'2) 3. Schritt ...

Also zeige noch, dass S σ -Algebra.

(i) z.z.: ~~$\emptyset$~~ $\emptyset \in S$

$$X(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{E} \text{ (da } \sigma\text{-Algebra)} \Rightarrow \emptyset \in S$$

(ii) z.z. $E \in S \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E \in S$

$$E \in S \Rightarrow X^{-1}(E) \in \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \{\omega \mid X(\omega) \in E\} \in \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \Omega \setminus \{\omega \mid X(\omega) \in E\} \in \mathcal{E} \quad (\text{da } \mathcal{E} \sigma\text{-Alg.})$$

$$\Rightarrow \{\omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R} \setminus E\} \in \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow X^{-1}(\mathbb{R} \setminus E) \in \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus E \in S \quad \checkmark$$

(iii) $E_1, E_2, \dots \in S \Rightarrow E_1 \cup E_2 \cup \dots \in S$

Es genügt, die E_i als beliebige Intervalle $]-\infty, a_i]$ zu wählen (wg. S. 14^{1/2} können daraus dann die anderen offenen Teilmengen erzeugt werden).

Sei dann $\tilde{a} = \max(a_i)$. Dann ist

$$]-\infty, a_1] \cup]-\infty, a_2] \cup \dots =]-\infty, \tilde{a}] \in S$$

Also ist $S = \text{Bor}(\mathbb{R})$ und X deshalb ZV.

2) Wegen der Permanenzeigenschaften ist folgende Funktion eine ZV: ^[mit X, Y reellwertige ZV]

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}((X+Y)^2 - (X-Y)^2) &= \frac{1}{4}(X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2) \\ &= \frac{1}{4}(4XY) \\ &= XY \quad \checkmark \end{aligned}$$

3) $X(k) := (-1)^k k$; $P\{k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ ^{Poissonverl.} $E(e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} X(k) \cdot P\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad (\text{Erster Summand ist Null.}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot (-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot (-1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot (-1) \cdot e^{-\lambda} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$E(X) = -1 \cdot e^{-2\lambda}$$

4) $1(x) = (f \circ X^{-1})(x) \cdot (X^{-1})'(x)$; geg.: $f(x) = 2x$; ^{richtig zV} ges.: $X: [0,1] \rightarrow [0,1]$, sodass $h=1$

$$1 = 2 \cdot (X^{-1}(x)) \cdot (X^{-1})'(x) \quad \text{Tip} \Rightarrow (X^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow (X^{-1}(x)) \cdot (X^{-1})'(x) = 0,5$$

$$\Rightarrow \underline{X(x) = x^2} \quad \checkmark$$

absolut
konvergent?